**Chapitre 6 – Séries de Fourier**

1. **Fonctions périodiques**
2. **Propriétés**

Proposition : On dit qu’une fonction est périodique si tel que

On dit alors que est une période de la fonction , et que est -périodique.

Dans toute la suite du chapitre, désignera un réel strictement positif.

Proposition : Soient , et . Il existe une unique fonction -périodique de dans qui coïncide avec sur

Proposition : Soit un fonction -périodique et . On a équivalence entre :

1. est continue sur .
2. La restriction est continue.

Proposition : Soit une fonction -périodique, et . On a équivalence entre :

1. est de classe par morceaux sur .
2. La restriction est de classe par morceaux.

Proposition : Soit une fonction -périodique. Pour tout ,

Démonstration : ⍟

Soit

(on a posé )

Dans toute la suite du chapitre, on considèrera uniquement des fonctions -périodiques.

Notons l’ensemble des fonctions de dans continues et -périodiques.

Et l’ensemble des fonctions continues par morceaux et -périodiques.

1. **L’espace préhilbertien**

Définition : Soient , on définit

Proposition : L’application

est une forme sesquilinéaire hermitienne positive sur .

Attention : ce n’est pas un produit scalaire hermitien sur  !!

Proposition : définit un produit scalaire hermitien sur .

Définition : , on pose

Remarque : Même si ce n’est pas une norme sur , elle vérifie quand même :

Proposition : , on a :

1. Inégalité de Cauchy-Schwarz :
2. Inégalité triangulaire :

Définition : , on définit

Et , on définit et

Proposition : La famille de fonctions est une famille orthonormée de .

La famille est une famille orthogonale de .

1. **Polynômes trigonométriques**

Définition : , on note et .

Les éléments de , qui correspondent à des combinaisons linéaires finies d’éléments sont appelés polynômes trigonométriques.

Proposition : Soit un polynôme trigonométrique. Alors

et , .

et , , .

De plus, on a

Définition : On appelle série trigonométrique toute suite de fonctions de la forme , où pour tout , est une combinaison linéaire de et de , ie

et , ,

Remarque : On note souvent les séries trigonométriques comme des séries bilatère . La somme partielle d’ordre d’une telle série de fonctions est : .

De même, en posant pour tout et

On peut écrire

1. **Coefficients de Fourier**
2. **Définition et propriétés calculatoires**

Définition : Soit . On définit ses coefficients de Fourier exponentiels de par :

On définit les coefficients trigonométriques de par

Proposition : Si une série trigonométriques CVU sur , alors sa fonction somme

appartient à , et les coefficients de Fourier exponentiels de sont égaux aux coefficients de la série trigonométrique, ie

Proposition : Soit . Alors

Remarque : On a et

Proposition : Soit

1. Si est à valeurs dans , alors ses coefficients de Fourier trigonométriques sont réels.
2. Si est paire, alors .
3. Si est impaire, alors .

Proposition : Soient alors , , .

1. **Séries de Fourier**

Définition : Soit . On appelle série de Fourier de la série trigonométrique . On appelle somme de Fourier de la fonction somme de la série de Fourier de  :

Pour on notera la somme partielle d’ordre de la série de Fourier de :

1. **Interprétation géométrique et comportement asymptotique**

Proposition : Soit .

Pour tout est le projeté orthogonal de sur .

De plus, pour tout ,

Proposition : Soit . Pour tout est orthogonal au sev , ie ,

En particulier, .

Corollaire : Inégalité de Bessel

Soit . Alors .

Cela équivaut à

De plus, la série bilatère et la série numérique convergent, et on a

Corollaire : Soit alors , , .

Propriété : Soit -périodique et de classe . Alors ,

En particulier, .

1. **Théorème de convergence**

Définition : Soit . On dit que est développable en série de Fourier si elle est égale sur à la somme de sa série de Fourier, ie si :

Théorème : (Théorème de Dirichlet)

Soit -périodique. Si est de classe par morceaux sur , alors la série de Fourier de converge simplement sur vers la régularisée de notée , où

Remarque : Si est continue pour un certain , alors .

Théorème : (théorème de convergence normale)

Soit -périodique. Si est de classe par morceaux sur et continue sur , alors la série de Fourier de converge normalement sur vers , et .

Théorème : (théorème de Parseval/Parseval-Bessel)

Soit , alors .

De plus, on a l’égalité de Parseval-Bessel :

ie :