**Chapitre 6 – Séries de Fourier**

1. **Fonctions périodiques**
2. **Propriétés**

Proposition : On dit qu’une fonction est périodique si tel que

On dit alors que est une période de la fonction , et que est -périodique.

Dans toute la suite du chapitre, désignera un réel strictement positif.

Proposition : Soient , et . Il existe une unique fonction -périodique de dans qui coïncide avec sur

Proposition : Soit un fonction -périodique et . On a équivalence entre :

1. est continue sur .
2. La restriction est continue.

Proposition : Soit une fonction -périodique, et . On a équivalence entre :

1. est de classe par morceaux sur .
2. La restriction est de classe par morceaux.

Proposition : Soit une fonction -périodique. Pour tout ,

Démonstration : ⍟

Soit

(on a posé )

Dans toute la suite du chapitre, on considèrera uniquement des fonctions -périodiques.

Notons l’ensemble des fonctions de dans continues et -périodiques.

Et l’ensemble des fonctions continues par morceaux et -périodiques.

1. **L’espace préhilbertien**

Définition : Soient , on définit

Proposition : L’application

est une forme sesquilinéaire hermitienne positive sur .

Attention : ce n’est pas un produit scalaire hermitien sur  !!

Proposition : définit un produit scalaire hermitien sur .

Définition : , on pose

Remarque : Même si ce n’est pas une norme sur , elle vérifie quand même :

Proposition : , on a :

1. Inégalité de Cauchy-Schwarz :
2. Inégalité triangulaire :

Définition : , on définit

Et , on définit et

Proposition : La famille de fonctions est une famille orthonormée de .

La famille est une famille orthogonale de .

1. **Polynômes trigonométriques**

Définition : , on note et .

Les éléments de , qui correspondent à des combinaisons linéaires finies d’éléments sont appelés polynômes trigonométriques.

Proposition : Soit un polynôme trigonométrique. Alors

et , .

et , , .

De plus, on a

Définition : On appelle série trigonométrique toute suite de fonctions de la forme , où pour tout , est une combinaison linéaire de et de , ie

et , ,

Remarque : On note souvent les séries trigonométriques comme des séries bilatère . La somme partielle d’ordre d’une telle série de fonctions est : .

De même, en posant pour tout et

On peut écrire

1. **Coefficients de Fourier**
2. **Définition et propriétés calculatoires**

Définition : Soit . On définit ses coefficients de Fourier exponentiels de par :

On définit les coefficients trigonométriques de par

Proposition : Si une série trigonométriques CVU sur , alors sa fonction somme

appartient à , et les coefficients de Fourier exponentiels de sont égaux aux coefficients de la série trigonométrique, ie

Proposition : Soit . Alors

Remarque : On a et

Proposition : Soit

1. Si est à valeurs dans , alors ses coefficients de Fourier trigonométriques sont réels.
2. Si est paire, alors .
3. Si est impaire, alors .

Proposition : Soient alors , , .